Talens baser och namn

Talbaser

Avsnittet presenterar ett verktyg (växling av baser), som jag behöver i samband med rationella tal.

Vår vanliga bas är tio (10). Den innehåller de tio entalen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9. Tio kommer kanske från, att vi utgår från antalet fingrar eller tår. Hade vi låtit antalet överensstämma med både fingrar och tår, så hade basen blivit tjugo, med tjugo ental till förfogande, till exempel
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, och J.

I basen 10 följer efter sista entalet 9 tiotalen 10, ..., 99, hundratalen 100, ..., 999.
I basen 20 följer efter sista entalet J tiotalen 10, ..., JJ, hundratalen 100, ..., JJJ.

Bas 10:	innehåller de tio siffrorna	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Bas 16:	innehåller de sexton siffrorna	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
Bas 7:	innehåller de sju siffrorna	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
Bas 2:	innehåller de två siffrorna	0, 1

Låt B stå för bastalet och s, t, u, v och w för ental som ingår i basen. Ett tal skrivs siffra för siffra. Jag låter den aktuella basen och exponenten vara kvar i bas 10 för läsbarhetens skull (markerar dem i fetstil).

Talet stuvw = $s\text{x}\mathbf{B}^{\mathbf{4}} + t\text{x}\mathbf{B}^{\mathbf{3}} + u\text{x}\mathbf{B}^{\mathbf{2}} + v\text{x}\mathbf{B}^{\mathbf{1}} + w\text{x}\mathbf{B}^{\mathbf{0}}$ och skrivs $\text{stuvw}_{(B)}$.
B = 1+största entalssiffran i basen. $\mathbf{B}^{\mathbf{0}}$ är samma som **1**.

Bas 16 (= 1 +F)	ger	$s\text{x}\mathbf{16}^{\mathbf{4}} + t\text{x}\mathbf{16}^{\mathbf{3}} + u\text{x}\mathbf{16}^{\mathbf{2}} + v\text{x}\mathbf{16}^{\mathbf{1}} + w\text{x}\mathbf{16}^{\mathbf{0}}$ $(\text{stuvw}_{(16)})$
Bas 10 (= 1+9)	ger	$s\text{x}\mathbf{10}^{\mathbf{4}} + t\text{x}\mathbf{10}^{\mathbf{3}} + u\text{x}\mathbf{10}^{\mathbf{2}} + v\text{x}\mathbf{10}^{\mathbf{1}} + w\text{x}\mathbf{10}^{\mathbf{0}}$ $(\text{stuvw}_{(10)})$
Bas 3 (= 1+2)	ger	$s\text{x}\mathbf{3}^{\mathbf{4}} + t\text{x}\mathbf{3}^{\mathbf{3}} + u\text{x}\mathbf{3}^{\mathbf{2}} + v\text{x}\mathbf{3}^{\mathbf{1}} + w\text{x}\mathbf{3}^{\mathbf{0}}$ $(\text{stuvw}_{(3))}$

Här följer några varianter till värdet $23_{(10)}$ (alltså värdet 23 i vår vanliga bas 10).

Bas 10 (siffrorna 0 - 9):	$23_{(10)}$	$= 2\text{x}\mathbf{10}^{\mathbf{1}} + 3\text{x}\mathbf{1}$
Bas 16 (siffrorna 0 - F):	$17_{(16)}$	$= 1\text{x}\mathbf{16}^{\mathbf{1}} + 7\text{x}\mathbf{1}$
Bas 8 (siffrorna 0 - 7):	$27_{(8)}$	$= 2\text{x}\mathbf{8}^{\mathbf{1}} + 7\text{x}\mathbf{1}$
Bas 3 (siffrorna 0 - 2):	$212_{(3)}$	$= 2\text{x}\mathbf{3}^{\mathbf{2}} + 1\text{x}\mathbf{3}^{\mathbf{1}} + 2\text{x}\mathbf{1}$
Bas 2 (siffrorna 0 - 1):	$10111_{(2)}$	$= 1\text{x}\mathbf{2}^{\mathbf{4}} + 0\text{x}\mathbf{2}^{\mathbf{3}} + 1\text{x}\mathbf{2}^{\mathbf{2}} + 1\text{x}\mathbf{2}^{\mathbf{1}} + 1\text{x}\mathbf{1}$

Notera att ett *värde* inte ändras, när jag byter bas. $23_{(10)}$ är precis lika mycket som $212_{(3)}$, som är summan av antalet fingrar, tår, öron och näsa hos mig.

Tal är namn på värden

Varje unikt värde har ett eget, unikt namn. Namnet byggs upp av de speciella bokstäver, vi kallar siffror, i vardagslivet 0, 1, 2, ..., 8, 9. Vid behov av fler sifferbokstäver lånar man exempelvis alfabetiska bokstäver.

28 är ett heltalsnamn och 28,727 ett decimaltalsnamn.
Inledande heltalsnollor och avslutande decimalnollor ingår inte i namnsättningen. Värdet 00024,34500000 har namnet 24,345, inget annat.

Det finns undantagsnamn som representerar ”värde saknas”. Ett av dem är 0. Nollan är lätt att associera med värdesaknad: 3**0**,23**0**5 saknar värde i entalsdelen och tusendelsdecimalen.

Även om ett värde är ”ändlöst litet”, är det dock ett värde – till skillnad från 0.

Värden kan beskrivas indirekt. 13/2 är en *kombination* av värdenamnen 13 och 2 och saknar därmed ett eget värdenamn. Efter uträkning får vi ett värde med namnet 6,5.

Namn på rationella värden

Vi har ett bråk a/b, där a och b är positiva och relativt prima heltal med b > 1. Jag spjälkar upp det till ax(1/b). 1/b är den rena decimaldelen på grundform.

När 1/b beräknas, får vi ett rent decimaltal på formen 1/b = 0,ddd... .
ax0,ddd... är bråkets värde.

När 1/b beräknas, blir det ett decimaltal. Om antalet decimaler (exklusive eventuell utfyllnad av svansnollor) är ändligt, har värdet automatiskt ett unikt namn. Om antalet inte är ändligt, beror det på, att decimalerna börjar upprepa sig ändlöst i en fix period (cyklisk sekvens).

Den första perioden markerar jag med understrykning.

3/7	= 3x(1/7)	= 3x$0,\underline{142857}142857...$	= $0,\underline{428571}428571428571...$
7/3	= 7x(1/3)	= 7x$0,\underline{3}33...$	= $2,\underline{3}33...$
31/16	= 31x(1/16)	= 31x0,0625	= 1,9375

1,9375 är ett korrekt namn, medan de två andra ovan inte är det.
Periodegenskapen signalerar dock för en lösning. Byt bas!

Ersätt bas 10 med bas b, där b är bråkets nämnare och resultatet blir ett godkänt värdenamn med exakt 1 decimal (gäller för alla bråk, även de med ändligt antal decimaler).

3/7:	Byt till bas 7.	$(3/7)_{(10)}$	$= (3x(1/10))_{(7)}$	$= (3x0,1)_{(7)}$	$= 0,3_{(7)}$.
7/3:	Byt till bas 3.	$(7/3)_{(10)}$	$= (21x(1/10))_{(3)}$	$= (21x0,1)_{(3)}$	$= 2,1_{(3)}$.
31/16:	Byt till bas 16.	$(31/16)_{(10)}$	$= (1Fx(1/10))_{(16)}$	$= (1Fx0,1)_{(16)}$	$= 1,F_{(16)}$.

Av ovanstående kan jag dra slutsatsen, att alla bråk AB har unika, exakta värden med tillhörande unika namn vid behov via val av lämplig bas.

Här listas 1/3 och 1/2 uträknade i baserna 10 och nedåt. Hoppas jag räknade rätt.

Bas	1/3 =	1/2 =
10	$0,\underline{3}33...$	0,5
9	0,3	$0,\underline{4}44...$
8	$0,\underline{25}2525...$	0,4
7	$0,\underline{2}22...$	$0,\underline{3}33...$
6	0,2	0,3
5	$0,\underline{13}1313...$	$0,\underline{2}22...$
4	$0,\underline{1}11...$	0,2
3	0,1	$0,\underline{1}11...$
2	$0,\underline{01}0101...$	0,1

Gemensamt värde med 9 namnförslag resulterar i att

1/3 ger 3 godkända namn: $0,3_{(9)}$, $0,2_{(6)}$ och $0,1_{(3)}$

1/2 ger 5 godkända namn: $0,5_{(10)}$, $0,4_{(8)}$, $0,3_{(6)}$, $0,2_{(4)}$ och $0,1_{(2)}$